Chapitre 5

Les fondamentaux de l'automatisme

5.1. Introduction aux systèmes asservis

5.1.1. Notion de transmittance d'un système commandé linéaire.

5.1.1.1. Définition

Un système physique est dit commandé s'il produit une grandeur y dont la valeur dépend d'une autre grandeur x et que l'on peut modifier à volonté y en agissant sur x.

- x est appelée grandeur d'entrée du système, ou grandeur de commande,
- y est appelée grandeur de sortie du système.

La représentation schématique d'un tel système par la figure ci-dessous, est appelée schéma fonctionnel.

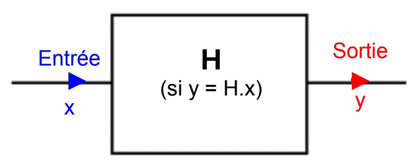


Fig. 5.1-1

Les flèches de ce schéma sont essentielles, car elles indiquent que c'est y qui dépend de la variable x et non x qui dépend de y, le phénomène étudié n'est pas réversible. La relation qui donne y à partir de x est une relation de cause à effet.
Dans le cas le plus simple, si nous supposons que la relation entre la sortie et l'entrée du système est régit par une équation différentielle linéaire à coefficients constants, on obtient l'expression :

$$y = H \cdot x$$

H est appelé fonction de transfert ou encore transmittance du système (x, y) étudié.

L'étude de la fonction de transfert permet de décrire les propriétés du système associé.
Ainsi, dans l'exemple suivant de l'étude d'un circuit électronique, en régime sinusoïdal, c'est la vision fréquentielle des signaux qui sera étudiée, se substituant à la vision temporelle. Les amplitudes et phases relatives des signaux en fonction de la fréquence constitueront ainsi le centre des études.
On représente le circuit électronique sous la forme d'une ''boîte noire'' et on considère l'entrée et la sortie sous leur représentation complexe.

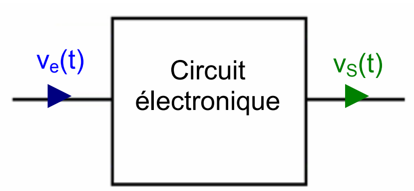


Fig. 5.1-2

Les signaux à l'entrée et à la sortie du circuit s'écrivent :

$v_e(t) = V_e \cdot \cos(\omega t + \varphi_e)$ ⇨ $\overline{V_e} = V_e \cdot e^{j(\omega t + \varphi_e)}$

et

$v_S(t) = V_S \cdot \cos(\omega t + \varphi_S)$ ⇨ $\overline{V_s} = V_S \cdot e^{j(\omega t + \varphi_S)}$

d'où l'expression de la fonction de transfert :

$$H(j\omega) = \frac{\overline{V_S}}{\overline{V_e}} = \frac{V_S}{V_e} \cdot e^{j(\varphi_S - \varphi_e)}$$

On définit alors les deux fonctions de la pulsation ω :

- le **gain** du circuit qui est le module de la fonction de transfert : $H(\omega) = \left|\overline{H}(j\omega)\right|$
- la **phase** du circuit qui est l'argument de la fonction de transfert : $\varphi = \arg\left[\overline{H}(j\omega)\right] = \varphi_e - \varphi_S$

5.1.1.2. Simplification du calcul des transmittances

L'utilisation de la transformée de Laplace permet de simplifier le calcul des transmittances. En effet, on démontre qu'à toute fonction f(t) définie pour tout t positif, il est possible de faire correspondre une fonction F(p) de la variable complexe p (p = a + jb).

F(p) = L[f(t)] $= \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$

Rappelons quelques-unes des propriétés de ces fonctions :
Si L[f(t)] = F(p)

$$\mathrm{L}\left[\frac{d[f(t)]}{dt}\right] = p.F(p) - f(0)$$

$$\mathrm{L}\left[\frac{d^2[f(t)]}{dt^2}\right] = p^2.F(p) - p.f(0) - \frac{df(0)}{dt}$$

Cette propriété permet de résoudre simplement les équations différentielles linéaires.
En pratique, si les fonctions f(t) et $\frac{d^k f(t)}{dt^k}$ sont nulles au temps t = 0, il suffit de poser $p^k = \frac{d^k}{dt^k}$ pour obtenir une nouvelle forme de l'équation différentielle qui régit le système.

Exemple

Considérons un système mécanique constitué par un arbre portant un volant d'inertie J soumis à l'action d'un ressort de rappel k, à un couple de frottement visqueux (coefficient f) et à un couple extérieur d'entraînement C(t).

Appelons θ l'angle de rotation de l'arbre et θ_0 sa position d'équilibre correspondant à C(t) = 0.

Le schéma fonctionnel représentatif du système mécanique est le suivant

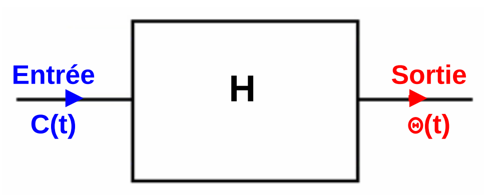


Fig. 5.1-3a

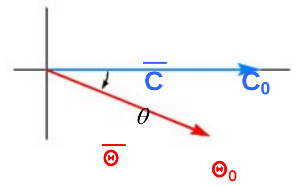


Fig. 5.1-3b

L'équation différentielle du système s'exprime par l'expression suivante :

$$J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} = C(t) - f \cdot \frac{d\theta}{dt} - k \cdot \theta$$

ou encore

$$C(t) = J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + f \cdot \frac{d\theta}{dt} + k \cdot \theta$$

La règle de simplification énoncée précédemment introduisant le terme p conduit à la nouvelle expression :

$$C(p) = J \cdot p^2 \cdot \theta(p) + f \cdot p \cdot \theta(p) + k \cdot \theta(p)$$

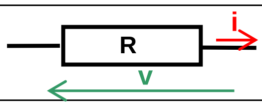
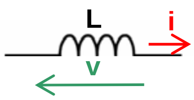
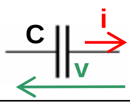
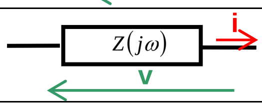
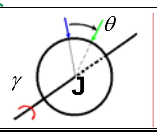
soit

$$C(p) = \left[J \cdot p^2 + f \cdot p \cdot + k\right] \cdot \theta(p)$$

d'où on tire finalement la fonction de transfert de ce système mécanique

$$H(p) = \frac{\theta(p)}{C(p)} = \frac{1}{J \cdot p^2 + f \cdot p \cdot + k}.$$

5.1.1.3. Transmittances des éléments usuels

Elément	Schéma	Equation	Schéma fonctionnel
Résistance		$v = R \cdot i$	v(p) → $\frac{1}{R}$ → i(p)
Inductance		$v = L \cdot \frac{di}{dt}$	v(p) → $\frac{1}{L \cdot p}$ → i(p)
Condensateur		$i = C \cdot \frac{dv}{dt}$	v(p) → $C \cdot p$ → i(p)
Impédance			v(p) → $\frac{1}{Z(p)}$ → i(p)
Inertie		$\gamma = J \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$	γ (p) → $\frac{1}{J \cdot p^2}$ → θ (p)

5.1.1.4. Formules fondamentales des systèmes bouclés

En pratique, la majorité des systèmes peuvent se ramener à la structure équivalente représentée par la figure ci-dessous.

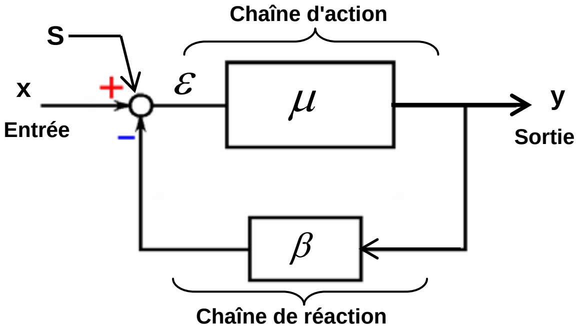


Fig. 5.1-4

Le système asservi ainsi représenté est constitué d'une chaîne d'action et d'une chaîne de réaction ayant respectivement pour transmittances μ et β fonctions de p.
L'organe S élabore le signal d'erreur

$$\overline{\varepsilon} = \overline{x} - \beta \cdot \overline{y}$$

et la chaîne de réaction donne

$$\overline{y} = \mu \cdot \overline{\varepsilon}$$

d'où on tire les égalités suivantes

$$\frac{\overline{x}}{\overline{y}} = \beta + \frac{1}{\mu} \qquad (1)$$

$$\frac{\overline{y}}{\overline{x}} = H = \frac{\mu}{1 + \mu \cdot \beta} \qquad (2)$$

$$\frac{\overline{\varepsilon}}{\overline{x}} = \frac{1}{1 + \mu \cdot \beta} \qquad (3)$$

C'est l'égalité (2) qui permet de calculer la valeur de la transmittance H d'un système en boucle fermée.
La formule (1) est très intéressante pour calculer la transmittance d'un système formé de deux boucles concentriques tel que celui de l'exemple ci-dessous

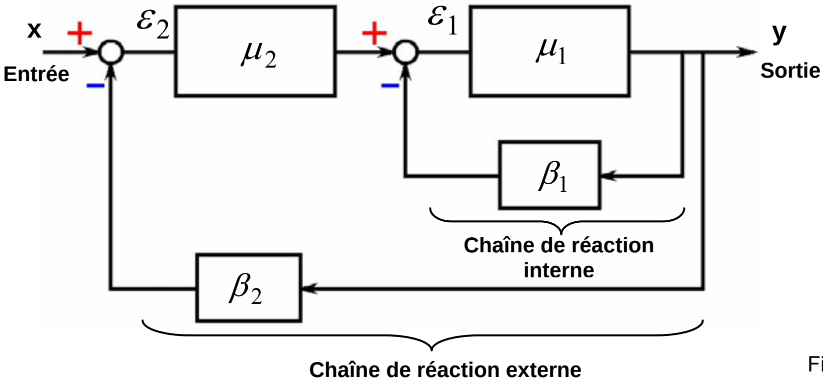


Fig. 5.1-5

En partant de la boucle interne, on peut écrire :

$$\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \left(\beta_1 + \frac{1}{\mu_1}\right) \cdot \frac{1}{\mu_2} + \beta_2$$

Cette formule se généralise aisément à un système comportant n boucles concentriques :

$$\frac{\bar{x}}{\bar{y}} = \left[\left[\left[\left(\beta_1 + \frac{1}{\mu_1}\right) \cdot \frac{1}{\mu_2} + \beta_2\right] \cdot \frac{1}{\mu_3} + \beta_3\right] \cdot \frac{1}{\mu_4} + \beta_4\right]$$

Les formules (1) et (2) permettent de déterminer la transmittance entre deux points d'un schéma fonctionnel, pourvu que ce dernier soit mis sous une forme simple appropriée par des transformations simples.
La formule (3) exprime la transmittance de l'erreur due au signal d'entrée x sans perturbations externes.

5.1.1.5. Transmittance de l'erreur due à une perturbation non nulle

La figure suivante montre le point d'application de la perturbation z.

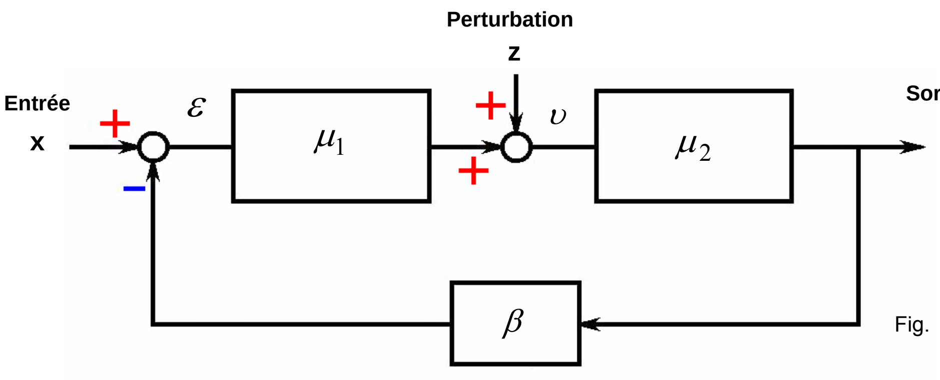


Fig. 5.1-6

A partir du schéma fonctionnel ci-dessus, on peut écrire les relations suivantes :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{x} - \beta \cdot \bar{y}\,; \qquad \bar{\upsilon} = \bar{z} + \bar{\varepsilon} \cdot \mu_1\,; \qquad \bar{y} = \bar{\upsilon} \cdot \mu_2$$

Si par hypothèse, le signal d'entrée x est nul, on obtient :

$$\bar{\varepsilon} = 0 - \beta \cdot \bar{y} \quad \Rightarrow \quad \bar{\varepsilon} = -\beta \cdot \mu_2 \bar{\upsilon} \quad \Rightarrow \quad \bar{\varepsilon} = -\beta \cdot \mu_2 \cdot \left(\bar{z} + \bar{\varepsilon} \cdot \mu_1\right)$$

De cette dernière relation on tire la l'expression de la transmittance de l'erreur due à la perturbation z :

$$\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{z}} = \frac{-\mu_2 \cdot \beta}{1 + \mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \beta}$$

5.1.1.6. Transformation d'un schéma fonctionnel

On peut facilement transformer un schéma fonctionnel pour lui donner une structure identique à celle permettant d'appliquer les formules fondamentales précédentes.
Les principales règles à respecter pour réaliser ces transformations sont résumées par la figure suivante :

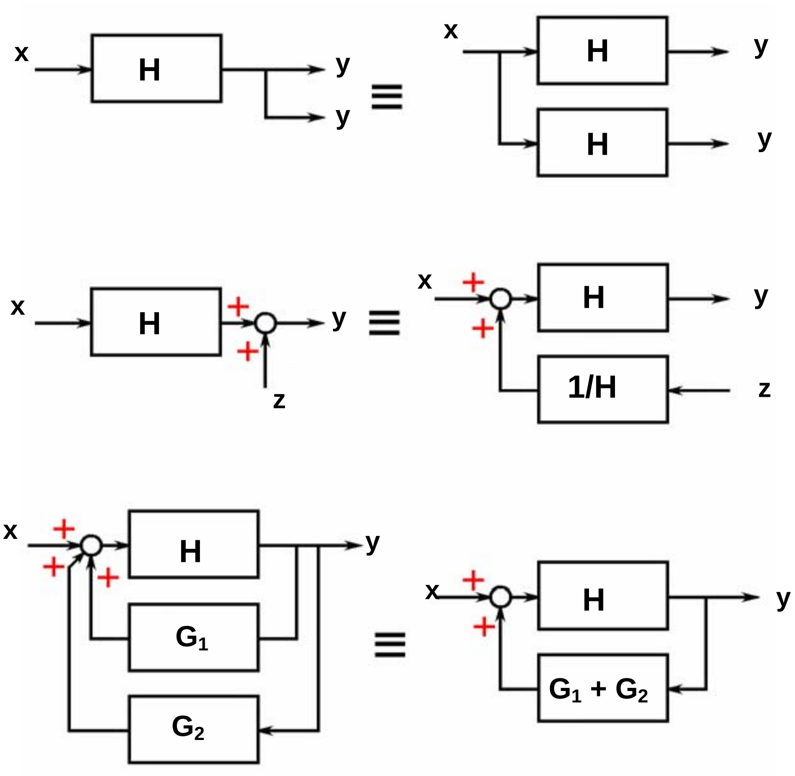


Fig. 5.1-7

5.1.2. Représentations graphiques des transmittances

5.1.2.1. Introduction

L'analyse purement algébrique de l'évolution du gain et de la phase de la fonction de transfert d'un circuit devient souvent très vite complexe et fastidieuse. Aussi, on lui préfère souvent une représentation graphique qui consiste à montrer comment varie le nombre complexe H(jω) quand on attribue à ω toutes les valeurs de 0 à ∞.
Les courbes obtenues expriment le comportement du système linéaire considéré soumis à des signaux sinusoïdaux de fréquence F (ou de pulsation ω) comprise entre 0 et ∞.
Cette représentation graphique est d'autant plus intéressante qu'elle permet de définir la stabilité du système et sa réponse à une excitation quelconque.
Toute grandeur peut, grâce au développement en série de Fourier ou à l'intégrale de Fourier, être décomposée en son spectre de fréquence.

5.1.2.2. Représentation dans le plan complexe (plan de Nyquist)

On calcule le module de $\overline{H}$ et l'argument φ pour chaque valeur de ω, et l'on place le point ainsi déterminé dont l'affixe est H en notant la valeur correspondante de ω (par exemple le point A pour la pulsation ω_A sur la figure page suivante 5.1-10).
En répétant ces calculs pour différentes valeurs de ω réparties entre 0 et ∞ on obtient ainsi la courbe Γ.